Lec 18 函数连续性与无穷小 (大) 的比较

18.1 函数 $y = f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases} \text{(I) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;} \\ \text{(II) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.} \end{cases}$

例 18.1 六类基本初等函数 (幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲) 在其定义域内均连续. 如 $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 时连续, 且从 $f(\dfrac{\pi}{2} - 0) = +\infty, f(\dfrac{\pi}{2} + 0) = -\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如 $f(x) = sgnx = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处, $f(0-0) = -1, f(0+0) = 1, f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处第一类间断点.(跳跃间断点)

定理 18.1

连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 18.2 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则线性组合 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

定理 18.2

连续的函数 $y = f(x)$ 若有反函数 $x = g(y)$ 或写为 $y = g(x)$, 则反函数 $y = g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y = x$ 对称.

例 18.3 $y = \sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \arcsin y$ 在 $[-1, 1]$ 上连续.

$y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x = \arccos y$ 在 $[-1, 1]$ 上连续且单调减.

$y = \tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \arctan y$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且单调增.

注 六个反三角函数都是有界变量

例 18.4 e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \ln y$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且单调增.

定理 18.3

连续函数的复合函数仍是连续函数.

证明 对于任意给定的正数 ε，因为 f 在 u_0 连续，则存在一个正数 $\eta > 0$，使得当 $|u - u_0| < \eta$ 时，

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

对于上述 $\eta > 0$，又因为 g 在 x_0 连续，所以下面存在一个正数 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta.$$

于是，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，从上面两个不等式得到

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon,$$

即函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续。

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 18.4

一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的的定义域中若存在孤立点 x_0, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)

18.2 无穷小量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \to 0, \beta \to 0$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x = o(x)$.
2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = O(x)$.
3. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$; 例如 $\sin x \sim x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \tan x (x \to 0); 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x (x \to 0)$.
4. 当 $x \to x_0$ 时, 若 $\exists k \in \mathbb{R}^+$, 使得 $\alpha(x) = O((x - x_0)^k)$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $(x - x_0)$ 的 k 阶无穷小

例 18.5 当 $x \to 0$ 时, 证明: 无穷小量 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

证明 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1/\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. 故 $\tan x - \sin x = O(x^3)$.

18.3 无穷大量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \to \infty, \beta \to \infty$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷大, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0 \Rightarrow n! = o(n^n)$.
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的等阶无穷大, 记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^n}{n!} = 0 \Rightarrow e^n = o(n!)$.

熟练掌握个别关系式:$(\forall a > 1, \alpha > 0, m > 0)$

$n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m$;

$x^x >> a^x >> x^\alpha >> (\ln x)^m$;

命题 18.1 (等价代换)

在积与商的极限中, 无穷小 (大) 因子可用等价无穷小 (大) 代换, 而不影响原来的极限值.

证明 设 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

✍ **作业** ex1.3:16,17,18.